

A-NET 50

รหัสวิชา 14 วิชา คณิตศาสตร์

วันเสาร์ที่ 3 มีนาคม 2550 เวลา 12.00 - 14.00 น.

ข้อ 1 - 25 ข้อละ 3 คะแนน

1. กำหนดให้ $A = \{x \mid (2x + 1)(x - 1) < 2\}$

และ $B = \{x \mid 16 - 9x^2 > 0\}$

เซต $A \cap B$ เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $\left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$

2. $\left(-1, \frac{5}{3}\right)$

3. $\left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{4}\right)$

4. $\left(-\frac{5}{3}, 1\right)$

2. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ให้เอกภพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนเฉพาะบวก

ข้อความ $\forall x \exists y [x^2 + x + 1 = y]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ข. นิเสธของข้อความ $\forall x [P(x) \rightarrow [Q(x) \vee R(x)]]$

คือ $\exists x [P(x) \wedge \sim Q(x) \wedge \sim R(x)]$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก

2. ก. ถูก และ ข. ผิด

3. ก. ผิด และ ข. ถูก

4. ก. ผิด และ ข. ผิด

3. กำหนดเหตุให้ดังนี้

1. เอกภพสัมพัทธ์ไม่เป็นเซตว่าง
2. $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$
3. $\forall x[Q(x) \vee R(x)]$
4. $\exists x[\sim R(x)]$

ข้อความในข้อใดต่อไปนี้เป็นผลที่ทำให้การอ้างเหตุผล สมเหตุสมผล

1. $\exists x[P(x)]$
2. $\exists x[Q(x)]$
3. $\forall x[P(x)]$
4. $\forall x[Q(x)]$

4. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 16\}$

$$s = \{(x, y) \in R \times R \mid xy^2 + x + 3y^2 + 2 = 0\}$$

เซตในข้อใดต่อไปนี้เป็นสับเซตของ $D_r - D_s$

1. $[-4, -1]$
2. $[-3, 0]$
3. $[-2, 1]$
4. $[-1, 2]$

5. กำหนดให้ f, g เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(x) = (x - 1)^3 + 3$

และ $g^{-1}(x) = x^2 - 1, \quad x \geq 0$

ถ้า $g \circ f^{-1}(a) = 0$ แล้ว a^2 อยู่ในเซตใดต่อไปนี้

1. $[10, 40]$
2. $[40, 70]$
3. $[70, 100]$
4. $[100, 130]$

6. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริง และ $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
ถ้า $(A + B)^2 - 2AB = A^2 + B^2$ แล้ว $\det(A)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 0.5
 2. 1.5
 3. 3.5
 4. 4.5
7. ถ้า k, l และ m เป็นจำนวนจริงที่ทำให้วงรี $kx^2 + ly^2 - 72x - 24y + m = 0$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(4, 3)$ และสัมผัสแกน Y แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ผิด
1. ความยาวแกนเอกเท่ากับ 12 หน่วย
 2. ความยาวแกนโทเท่ากับ 8 หน่วย
 3. ระยะห่างระหว่างจุดโฟกัสทั้งสองเท่ากับ $4\sqrt{5}$ หน่วย
 4. จุด $(2, 6)$ อยู่บนวงรี
8. วงกลม C มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด และผ่านจุดโฟกัสของพาราโบลาซึ่งมีสมการเป็น $(x - 2)^2 = 8y$ โดยเส้น
ไดเรกทริกซ์ของพาราโบลาตัดวงกลม C ที่จุด P และจุด Q ถ้าจุด R อยู่บนพาราโบลาและอยู่ห่างจากจุดโฟกัสเป็น
ระยะทาง 4 หน่วย แล้ว สามเหลี่ยม PQR มีพื้นที่เท่ากับข้อใด
1. 8 หน่วย
 2. 9 หน่วย
 3. 10 หน่วย
 4. 12 หน่วย

9. กำหนดให้ $A = \left\{ z \in \mathbb{R} \mid z = \frac{x}{y} \text{ และ } 6 \log(x - 2y) = \log x^3 + \log y^3 \right\}$

ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต A มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3

2. 4

3. 5

4. 6

10. ให้ $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j} + 2\bar{k}$ และ $\bar{v} = 2a\bar{i} - 3b\bar{j}$ โดยที่ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก และ θ เป็นมุมระหว่าง \bar{u} และ \bar{v} ถ้า $|\bar{u}| = 3$ และ $\cos \theta = \frac{1}{3}$ แล้ว $\bar{u} \times \bar{v}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $6\bar{i} + 8\bar{j} - 10\bar{k}$

2. $-6\bar{i} - 8\bar{j} + 10\bar{k}$

3. $12\bar{i} + 4\bar{j} - 10\bar{k}$

4. $-12\bar{i} - 4\bar{j} + 10\bar{k}$

11. กำหนดให้ $P(-8, 5)$, $Q(-15, -19)$, $R(1, -7)$ เป็นจุดบนระนาบ ถ้า $\bar{v} = a\bar{i} + b\bar{j}$ (a, b เป็นจำนวนจริง) เป็นเวกเตอร์ซึ่งมีทิศทางขนานกับเส้นตรงซึ่งแบ่งครึ่งมุม \widehat{QPR} แล้ว $\frac{a}{b}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2

2. -2

3. $\frac{2}{11}$ 4. $-\frac{2}{11}$

12. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\tan 14^\circ + \tan 76^\circ = 2 \operatorname{cosec} 28^\circ$

ข. ถ้า $x > 0$ และ $\sin(2 \arctan x) = \frac{4}{5}$ แล้ว $x \in \left(\frac{1}{3}, 3\right)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1. ก. ถูก และ ข. ถูก | 2. ก. ถูก และ ข. ผิด |
| 3. ก. ผิด และ ข. ถูก | 4. ก. ผิด และ ข. ผิด |

13. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีด้านตรงข้ามมุม A, B, C ยาว $2a, 3a, 4a$ ตามลำดับ ถ้า $\sin A = k$ แล้ว

$\cot B + \cot C$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | | |
|-------------------|------------------|-------------------|------------------|
| 1. $\frac{1}{6k}$ | 2. $\frac{k}{6}$ | 3. $\frac{1}{3k}$ | 4. $\frac{k}{3}$ |
|-------------------|------------------|-------------------|------------------|

14. กำหนดฟังก์ชันจุดประสงค์และข้อสมการข้อจำกัดเป็นดังนี้

$$C = 40x + 32y$$

$$6x + 2y \geq 12$$

$$2x + 2y \leq 8$$

$$4x + 12y \geq 24$$

ค่าต่ำสุดของ C เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| 1. 108 | 2. 112 | 3. 136 | 4. 152 |
|--------|--------|--------|--------|

15. ให้ z_1, z_2, z_3 เป็นคำตอบของสมการ $1 + \left(1 + \frac{1}{z}\right)^3 = 0$ แล้ว $\operatorname{Re}(z_1 + z_2 + z_3)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. -1 3. $\frac{3}{2}$ 4. $-\frac{3}{2}$

16. ให้ z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $z_1 z_2 = 2i$ และ $z_1^{-1} = \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}$ แล้ว $\left|z_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} z_2\right|^2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4 2. 5 3. 7 4. 8

17. จัดคน 8 คน ซึ่งมีสมชาย สมคิด และสมศรี รวมอยู่ด้วย เข้านั่งเรียงกันเป็นแถวตรง โดยที่สมศรีนั่งกลางติดกับสมชาย และสมคิดเสมอ จำนวนวิธีการจัดที่นั่งดังกล่าวมีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 360 2. 720 3. 1080 4. 1440

21. กำหนดให้ $f(x) = 1 + \frac{a}{x}$ และ $g(x) = x^2 + b$ ถ้า $(f \circ g)(0) = \frac{1}{2}$ และ $f''(-1) = 2$ แล้ว $\left(\frac{f}{g}\right)'(a+b)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{1}{3}$

2. $-\frac{1}{4}$

3. $\frac{1}{4}$

4. $\frac{1}{3}$

22. พื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^3 - 2x^2 + 2x$ และแกน X จาก $x = 0$ ถึง $x = 4$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 16 ตารางหน่วย

2. 16.25 ตารางหน่วย

3. 16.5 ตารางหน่วย

4. 17 ตารางหน่วย

23. ตารางต่อไปนี้ เป็นคะแนนสอบวิชาหนึ่งของนักเรียน 40 คน

คะแนน	จำนวนนักเรียน (f_i)
10 - 14	4
15 - 19	6
20 - 24	a
25 - 29	8
30 - 34	4
35 - 39	6

โดยมีคะแนนเฉลี่ย (μ) เท่ากับ 24.5 และ $\sum_{i=1}^3 f_i(x_i - \mu) = -125$ ถ้าส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์เท่ากับ b และส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยเท่ากับ c แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $b = 5$ และ $c = 6.25$ 2. $b = 6.25$ และ $c = 5$ 3. $b = 4.5$ และ $c = 5$ 4. $b = 5$ และ $c = 4.5$

24. สมศักดิ์สอบวิชาคณิตศาสตร์สองครั้ง โดยที่ได้ค่ามาตรฐานของคะแนนสอบครั้งที่หนึ่งเป็น 1.96 และได้คะแนนในการสอบครั้งที่สองคิดเป็นตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 98.3 ในการสอบทั้งสองครั้งนี้ คะแนนสอบมีการแจกแจงปกติ โดยมีคะแนนเฉลี่ยเท่ากัน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบครั้งที่หนึ่งและครั้งที่สองเท่ากับ 10 และ 5 ตามลำดับ

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก. คะแนนสอบที่ได้ในครั้งที่หนึ่ง น้อยกว่า ครั้งที่สอง
ข. ค่ามาตรฐานของคะแนนสอบครั้งที่หนึ่ง น้อยกว่า ครั้งที่สอง

ตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐานระหว่าง 0 ถึง z เป็นดังนี้

z	1.53	1.96	2.12	2.35
พื้นที่ใต้เส้นโค้ง	0.4370	0.4750	0.4830	0.4906

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

25. ถ้าน้ำหนักของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ของโรงเรียนแห่งหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยมีมัธยฐานเท่ากับ 10 กิโลกรัม และสัมประสิทธิ์ของการแปรผันเท่ากับ 0.2 นักเรียนที่หนักมากกว่า 13 กิโลกรัม และหนักน้อยกว่า 8 กิโลกรัม คิดเป็นเปอร์เซ็นต์เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐานระหว่าง 0 ถึง z เป็นดังนี้

z	.75	1	1.25	1.5
พื้นที่ใต้เส้นโค้ง	0.2734	0.3413	0.3944	0.4332

1. 9.19 % 2. 22.55 % 3. 40.81 % 4. 69.19 %

ข้อ 1 - 5 ข้อละ 2 คะแนน

1. กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยที่สุด ซึ่งหารด้วย 7 แล้วมีเศษเหลือเท่ากับ 4 ถ้า 9 และ 11 ต่างก็หาร $n - 2$ ลงตัวแล้ว n คือจำนวนใด

2. ถ้าเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา $16x^2 - 9y^2 + 32x + 36y = 164$ ตัดแกน X ที่จุด x_1, x_2 แล้ว ระยะระหว่าง x_1, x_2 ยาวกี่หน่วย

3. ถ้า $\log_2 3 = 1.59$ แล้ว ค่าของ x ซึ่งสอดคล้องสมการ $2^{2x+1} \cdot 3^{2x+2} = 12^{2x}$ เท่ากับเท่าใด

4. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ x & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ถ้า $C_{12}(A) = 4$ แล้ว $\det(2A)$ มีค่าเท่าใด

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-3x+x^2} \right)$ มีค่าเท่าใด

ข้อ 6 - 10 ข้อละ 3 คะแนน

6. ถ้าเซตคำตอบของอสมการ $|x^2 + x - 2| < (x + 2)$ คือช่วง (a, b) แล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

7. กำหนดให้ $f(x) = 3x + 5$ และ $h(x) = 3x^2 + 3x - 1$ ถ้า g เป็นฟังก์ชันซึ่งทำให้ $f \circ g = h$ แล้ว $g(5)$ มีค่าเท่าใด

8. ให้ $(x - 1 + i)$ และ $(x + 2)$ เป็นตัวประกอบของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ แล้ว $(x - 3)$ หาร $f(x)$ เหลือเศษเท่าไร

9. ในการทดสอบวิชาคณิตศาสตร์พบว่า คะแนนสอบของนักเรียนมีการแจกแจงปกติ ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์เท่ากับ 6 สัมประสิทธิ์ควอไทล์เท่ากับ 0.6 คะแนนเฉลี่ยของการสอบครั้งนี้มีค่าเท่ากับเท่าใด

10. ถ้าความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูลชุดหนึ่งระหว่างตัวแปร x และ y มีกราฟเป็นเส้นตรง โดยที่

$$\sum_{i=1}^8 x_i = 32, \quad \sum_{i=1}^8 y_i = 16, \quad \sum_{i=1}^8 x_i y_i = 65$$

$$\sum_{i=1}^8 x_i^2 = 140, \quad \sum_{i=1}^8 y_i^2 = 34$$

ถ้า $x = 8$ แล้ว จะประมาณค่า y ได้เท่าใด (ตอบเป็นทศนิยมสองตำแหน่ง)

เฉลย

1. 2	8. 1	15. 4	22. (37.33)	4. 16
2. 3	9. 2	16. 3	23. 1	5. 1
3. 2	10. 1	17. 4	24. 3	6. 2
4. 4	11. 4	18. 3	25. 2	7. 28
5. 1	12. 1	19. 2	1. 200	8. 25
6. 3	13. 3	20. (0.125)	2. 3	9. 10
7. 4	14. 1	21. 4	3. 2.09	10. 2.33

แนวคิด

ตอนที่ 1

3. 2

สมมติให้เหตุทั้ง 4 ข้อเป็นจริง เราจะตรวจสอบว่าผลในข้อใดที่ถ้าเป็นเท็จแล้วจะทำให้เกิดการขัดแย้ง

จาก $\exists x[\sim R(x)]$ เป็นจริง แสดงว่าต้องมี a ในเอกภพสัมพัทธ์ ที่ทำให้ $\sim R(a)$ เป็นจริง จะได้ $R(a)$ ต้องเป็นเท็จ

จาก $\forall x[Q(x) \vee R(x)]$ เป็นจริง แสดงว่าทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์ (รวมทั้ง a ด้วย) ต้องทำให้ $Q(x) \vee R(x)$ เป็นจริง นั่นคือ จะได้ว่า $Q(a) \vee R(a)$ ต้องเป็นจริง

แต่จาก $R(a)$ เป็นเท็จ จะต้องได้ $Q(a)$ เป็นจริง ถึงจะทำให้ $Q(a) \vee R(a)$ เป็นจริงได้

เนื่องจาก $Q(a)$ เป็นจริง จึงสามารถสรุปได้ว่า มี a ในเอกภพสัมพัทธ์ ที่ทำให้ $Q(a)$ เป็นจริง

ดังนั้น ประโยค $\exists x[Q(x)]$ จึงเป็นจริง ไม่สามารถเป็นเท็จได้ ดังนั้น ผลสรุปในข้อ 2 จึงสมเหตุสมผล

หมายเหตุ : หนังสือบางเล่ม เฉลยข้อ 4 ซึ่งจะมีตัวอย่างค้านได้

เช่น ถ้า $U = \{-1, 1\}$, $P(x)$ แทนประโยค $x = 0$, $Q(x)$ แทนประโยค $x < 0$, $R(x)$ แทนประโยค $x > 0$

จะทำให้ $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$ จริง เพราะ $P(-1)$ และ $P(1)$ เป็นเท็จ ได้ประโยคในรูป $F \rightarrow ?$ ซึ่งเป็นจริงเสมอ

และ $\forall x[Q(x) \vee R(x)]$ เป็นจริง เพราะ $Q(-1)$ เป็นจริง กับ $R(1)$ เป็นจริง

และ $\exists x[\sim R(x)]$ เป็นจริง เพราะมี $R(-1)$ เป็นเท็จ

แต่จะเห็นว่าตัวเลือก $\forall x[Q(x)]$ เป็นเท็จ เพราะมี $Q(1)$ เป็นเท็จ จึงไม่สมเหตุสมผล

6. 3

$$(A + B)^2 - 2AB = A^2 + B^2$$

$$(A + B)(A + B) - 2AB = A^2 + B^2$$

$$A^2 + AB + BA + B^2 - 2AB = A^2 + B^2$$

$$BA = AB$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & a - 3b \\ 5 & 2a + 3b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2a & -3 + 3a \\ 1 + 2b & -3 + 3b \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก เมทริกซ์สลับที่การคูณไม่ได้

จึงต้องค่อยๆกระจาย $(A + B)^2$

และระวังตำแหน่งซ้ายขวา

แก้สมการ จะได้ $a = -\frac{3}{2}$, $b = 2$

ดังนั้น $\det A = (1)(2) - (1)(-\frac{3}{2}) = 3.5$

9. 2

$$6 \log(x - 2y) = \log x^3 + \log y^3$$

$$\log(x - 2y)^6 = \log x^3 y^3$$

$$(x - 2y)^6 = x^3 y^3$$

$$\begin{aligned}(x - 2y)^2 &= xy && \text{(ถอดราก 3 ทั้งสองข้าง)} \\ x^2 - 4xy + 4y^2 &= xy \\ x^2 - 5xy + 4y^2 &= 0 \\ (x - 4y)(x - y) &= 0\end{aligned}$$

จะได้ $x = 4y$ หรือ $x = y$ แต่จะเห็นว่า ถ้า $x = y$ จะทำให้หลัง \log บางตัวเป็นลบ
ดังนั้น เหลือ $x = 4y$ เท่านั้น ซึ่งจะได้ $\frac{x}{y} = 4$

ตอนที่ 2

3. 2.09

$$\begin{aligned}\log_2 2^{2x+1} \cdot 3^{2x+2} &= \log_2 12^{2x} \\ \log_2 2^{2x+1} + \log_2 3^{2x+2} &= 2x \log_2 12 \\ 2x + 1 + (2x + 2) \log_2 3 &= 2x \log_2 (2^2 \cdot 3) \\ 2x + 1 + (2x + 2) \log_2 3 &= 2x (\log_2 2^2 + \log_2 3) \\ 2x + 1 + (2x + 2) \log_2 3 &= 2x(2 + \log_2 3) \\ 2x + 1 + 2x \log_2 3 + 2 \log_2 3 &= 4x + 2x \log_2 3 \\ 2x + 1 + 2(1.59) &= 4x \\ 4.18 &= 2x \\ 2.09 &= x\end{aligned}$$

4. 16

$$C_{12}(A) = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ x & -1 \end{vmatrix} = -(-3 - x) = 3 + x$$

แต่โจทย์ให้ $C_{12}(A) = 4$ ดังนั้น $3 + x = 4$ จะได้ $x = 1$

$$\text{จะได้ } \det(2A) = 2^3 \det A = 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 8(-1 + 1 - 1 + 3) = 16$$